

1. Разложите заданные функции в ряды Лорана в указанных кольцах либо в окрестности заданных точек. Где сходятся найденные ряды?

- 1) $\frac{1}{z^2(z-1)^2}$ в окрестности точек $z = 0$, $z = 1$ и $z = \infty$.
- 2) $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ ($0 < |a| < |b|$) в окрестности точек $z = 0$, $z = b$, $z = \infty$ и в кольце $|a| < |z| < |b|$.
- 3) $\frac{z^2+2z+5}{(z-1)(z^2+4)}$ в окрестности точек $z = 1$ и в кольце $1 < |z| < 2$.
- 4) $\sqrt{z(z-1)}$ в окрестности точки $z = \infty$ (рассмотреть обе ветви функции).
- 5) $e^{z+\frac{1}{z}}$ в области $0 < |z| < \infty$.

2. Вычислите вычеты следующих функций относительно всех их изолированных особенностей на сфере Римана \mathbb{P} :

- 1) $\frac{1}{4z^3-z^5}$;
- 2) $\frac{z^{2n}}{(1-z)^n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$
- 3) $z^3 \sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$;
- 4) $e^{z+\frac{1}{z}}$.

3. Найдите вычет функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$ в точке $z = a$, если

- 1) $z = a$ – нуль порядка n для функции $f(z)$;
- 2) $z = a$ – полюс порядка n для функции $f(z)$.

4. Вычислите следующие интегралы:

1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 5)^2};$$

2)

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

5. Можно ли разложить какую-либо ветвь функции $\sqrt{1-\sqrt{z}}$ в степенной ряд в окрестности точек $z = 0$, $z = 1$, $z = \infty$? Если да, то найдите эти разложения.

6. Пусть функция $f(z)$ задана в единичном круге с центром в нуле своим разложением в ряд

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}, \quad |z| < 1.$$

Найти множество голоморфности многозначной аналитической функции f , полученной путем продолжения $f(z)$ вдоль всех возможных путей.